

極限まとめ

数列の極限

- 収束 • $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ……「極限值 A に収束」
- 発散 $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty (-\infty) \dots\dots$ 「正(負)の無限大に発散」
 $\bullet \{a_n\}$ が振動 ……「極限は存在しない」

数列の極限の性質

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がそれぞれ 極限值(有限値)をもつとき、

- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- ② $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- ③ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- ④ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

等比数列の極限

等比数列 $\{r^n\}$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \begin{cases} 0 & \dots -1 < r < 1 \text{ のとき} \\ 1 & \dots r = 1 \\ \text{発散} & \dots r \leq -1, 1 < r \end{cases}$$

⇒注 初項 a の等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ については、
 $a = 0$ ならば r によらず 0 に収束する。

はさみうちの原理(数列)

数列 $\{a_n\}, \{x_n\}, \{b_n\}$ の間に、常に
 $a_n \leq x_n \leq b_n$
 が成立しており、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ ならば
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$

無限級数

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ に対して、

部分和 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ と定める。
 $\{S_n\}$ が極限值 T をもつ、すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = T$ であるとき、

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は和 T をもつという。

つまり、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = T$

無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がそれぞれ 極限值(有限値)をもつとき、

- ① $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
- ② $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

無限等比級数

無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ に対して

部分和 $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$ である。

$$S_n = \begin{cases} na & (r = 1) \dots \textcircled{1} \\ \frac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \dots \textcircled{2} \end{cases} \text{ と場合分けされる。}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を考えると、

- (i) $a = 0$ のとき ①, ② ともに r によらず 0 に収束
- (ii) $-1 < r < 1$ のとき ② は $\frac{a}{1-r}$ に収束

無限級数の収束・発散

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が和をもつ} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

対偶で言い換えると、

$$\text{数列} \{a_n\} \text{ が} 0 \text{ に収束しない} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散する}$$

関数の極限

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ であるとは、

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A \text{ (右側極限)}$$

かつ

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A \text{ (左側極限)}$$

であること

はさみうちの原理(関数)

関数 $f(x), g(x), h(x)$ が $x = a$ を除く $x = a$ の近く(近傍)で
 つねに $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ が成立しており、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A \text{ ならば、}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

三角関数の極限公式

θ は弧度法で表された角とする。
 $\theta \rightarrow 0$ のとき以下の公式が成立する。

- ① $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$
- ② $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$
- ③ $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1$

指数・対数関数の極限

$$a > 1 \text{ のとき} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \end{cases} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty \\ \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty \end{cases} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = \infty \end{cases}$$

自然対数 e の定義 ①

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

すなわち

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

この定数 $e = 2.71828\dots$ を 自然対数の底 という。

この定数 e を底にもつ対数

$$\log_e x$$

を自然対数と呼び、 $\log x$ や $\ln x$ と表す。

自然対数 e の定義 ②

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

⇒注 高校数学においては(e の性質)として扱われることが多い。

関数の連続性

$x = a$ の近く(近傍)で定義されている関数 $f(x)$ について

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$f(x)$ は $x = a$ で連続である という。