複素数平面まとめ

複素数平面

$z=x+yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R}$, i は虚数単位) と点 $(x,\ y)$ を 1 対 1 に対応させた平面を **複素数平面** という。

絶対値

$z=x+yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$ に対し,
$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ と定める。
すると, $|\boldsymbol{z}|^2=\boldsymbol{z}\overline{\boldsymbol{z}}$

特に, $z \neq 0$ のとき, $\overline{z}=\dfrac{|z|^2}{z}$

任意の複素数 $\alpha,\ \beta$ に対し,
① $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$
② $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ $(\beta \neq 0)$
③ $|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$ (三角不等式)

共役複素数

$z=x+yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$ に対して $\overline{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{yi}$ を z の **共役複素数** という。

任意の複素数 $\alpha,\ \beta$ に対し,
① $\begin{cases} \overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta} \\ \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta} \end{cases}$
② $\overline{\alpha^n}=\overline{\alpha}^n$

実部・虚部

$\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ を z の **実部**

$\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}$ を z の **虚部** という。

実数条件・純虚数条件

・z が実数 $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{z}=\overline{\boldsymbol{z}}$
・z が純虚数 $\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z)=0$ かつ $z \neq 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{z}+\overline{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{0}$ **かつ** $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$

極形式

0 でない複素数 z に対して
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0)$
を z の **極形式** 表示という。
このとき, $\theta=\arg z$ などと表す。

積と商

$\begin{cases} z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1) \\ z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \end{cases}$ としたとき,

積

$$\boldsymbol{z_1z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}}$$

つまり $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$
$\arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2$

商

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}}$$

つまり $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$

ド・モアブルの定理

n を整数とする。$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ に対し,
$\boldsymbol{z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)}$

1 の n 乗根

n を正の整数とするとき,
$z^n=1$ となる複素数 z は n 個存在し

$$\boldsymbol{z=\cos\frac{2k}{n}\pi+i\sin\frac{2k}{n}\pi\ (k=0,\ 1,\ ..,\ n-1)}$$

特に, $z \neq 1$ である $n-1$ 個の複素数は

$$\boldsymbol{z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^2+z+1=0}$$

を満たす。

点の周りの回転

3 つの複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ について,
点 α を中心に
β を r 倍 θ 回転させた点を γ とすると

$$\boldsymbol{\gamma-\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)(\beta-\alpha)}$$

特に, $\beta \neq \alpha$ のとき,

$$\boldsymbol{\theta=\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}$$

共線条件・垂直条件

「点の周りの回転」における θ について $-\pi<\theta \leqq \pi$ とすると

共線条件

異なる 3 点 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が同一直線上であるとき,
$\theta=0,\ \pi$ つまり $\boldsymbol{\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}$ **が実数**
✎ k(実数) を用いて, $\gamma-\alpha=k(\beta-\alpha)$ である。

垂直条件

直線 $\alpha\beta \perp \alpha\gamma$ であるとき,
$\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$ つまり $\boldsymbol{\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}$ **が純虚数**
✎ $\beta-\alpha$ と $\gamma-\alpha$ の内積が 0 ともとらえられる。

内分・外分・重心

異なる 3 点 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ について,
① 線分 $\alpha\beta$ を $m:n$ に内分する点は $\boldsymbol{\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n}}$
② 線分 $\alpha\beta$ を $m:n$ に外分する点は $\boldsymbol{\dfrac{-n\alpha+m\beta}{m-n}}$
③ 三角形 $\alpha\beta\gamma$ の重心を表す点は, $\boldsymbol{\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}$

複素数が表す図形

① $|z-\alpha|=|z-\beta|$
線分 $\boldsymbol{\alpha\beta}$ の垂直二等分線
② $|z-\alpha|=r$
中心 $\boldsymbol{\alpha}$, 半径 $\boldsymbol{r}$ の円
③ $m|z-\alpha|=n|z-\beta|$ $(m:n \neq 1:1)$
アポロニウスの円

変換

① $w=z+\alpha$(**平行移動**)
② $w=\beta z$(**回転・拡大**)
③ $w=\dfrac{1}{z}$(**反転変換**)
①〜③ の合成を **1 次分数変換** という。
④ $w=z+\dfrac{a^2}{z}$(**ジューコフスキー変換**)