

指数・対数まとめ

指数の拡張 ①

$a > 0$ とする. n は整数で $n > 0$ とする.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

累乗根

n は整数とする.

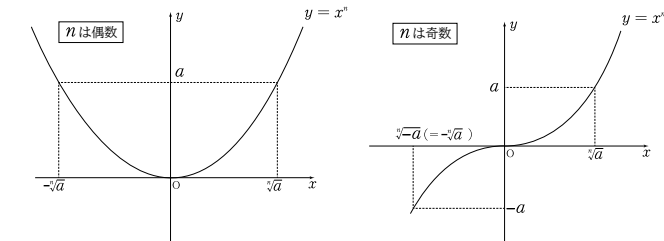
$x^n = a$ を満たす x を **a の n 乗根** という.

$n = 2, 3, 4 \cdots$ をまとめて **累乗根** という.

$a > 0$ とする.

n が偶数ならば a の n 乗根 は2つ存在し, 正のほうを $\sqrt[n]{a}$ と表す.

n が奇数ならば a の n 乗根 はただ1つ存在し, それを $\sqrt[n]{a}$ と表す.



指数の拡張 ②

$a > 0$ とする. m, n は整数で $m > 0$ とする.

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

指数法則

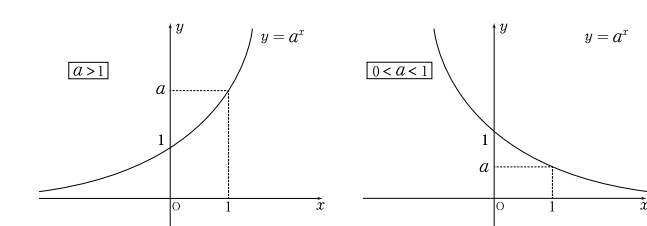
$a > 0, b > 0$ で, p, q を **実数** とするとき

- ① $a^p \times a^q = a^{p+q}$
- ② $a^p \div a^q = a^{p-q}$
- ③ $(a^p)^q = a^{pq}$
- ④ $(ab)^p = a^p b^p$

指数関数

x を実数とする. $a > 0$ に対して, $y = a^x$ を a を **底** とする **指数関数** という. (底の条件 $0 < a < 1, 1 < a$) $a = 1$ だと対数関数が定義できない.

指数関数のグラフ



指数の大小関係

- ① $0 < a < 1, 1 < a$ のとき $p = q \iff a^p = a^q$
- ② $a > 1$ のとき $p < q \iff a^p < a^q$
- ③ $0 < a < 1$ のとき $p < q \iff a^p > a^q$

対数の定義

$0 < a < 1, 1 < a$ で $M > 0$ とする.

$$a^p = M \iff p = \log_a M$$

と定義し, $\log_a M$ を a を **底** とする M の **対数** という.

この $M (> 0)$ を $\log_a M$ の **真数** という.

対数の性質

$0 < a < 1, 1 < a$ とする. また $M > 0$ とする.

- ① $\log_a a^p = p$
- ② $\log_a a = 1$
- ③ $\log_a 1 = 0$
- ④ $a^{\log_a M} = M$

対数法則

$0 < a < 1, 1 < a$ とする. また $M > 0, N > 0, r$ は実数 とする.

- ① $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
- ② $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- ③ $\log_a M^r = r \log_a M$

底の変換

a, b, c は正の数で, $a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$ とする.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

とくに, $\begin{cases} \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \\ \log_c a \cdot \log_a b = \log_c b \end{cases}$ が成立する.

対数関数

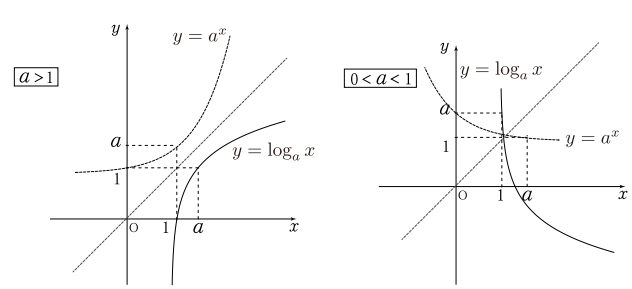
$0 < a < 1, 1 < a$ とする.

$y = a^x \iff x = \log_a y$ であり,

x と y を交換する ($y = x$ 対称移動する) と, $y = \log_a x$ を得る.

この $y = \log_a x$ という関数を a を底とする **対数関数** という.

対数関数のグラフ



対数の大小関係

$0 < a < 1, 1 < a$ とする. また $p > 0, q > 0$ とする.

- ① $0 < a < 1, 1 < a$ のとき $p = q \iff \log_a p = \log_a q$
- ② $a > 1$ のとき $p < q \iff \log_a p < \log_a q$
- ③ $0 < a < 1$ のとき $p < q \iff \log_a p > \log_a q$

常用対数

底を 10 とする対数 を **常用対数** とする.

特に $\log_{10} 2 = a, \log_{10} 3 = b$ とおくと,

- $\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2a$
- $\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 = 1 - a$
- $\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = a + b$
- $\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3a$
- $\log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2b$

桁数への応用

n 桁の正の整数 A について,

$10^{n-1} \leq A < 10^n$ が成立.

常用対数をとると,

$n - 1 \leq \log_{10} A < n$ が成立.

小数首位への応用

小数第 n 位に初めて 0 でない数が現れる数 B について,

$\frac{1}{10^n} \leq B < \frac{1}{10^{n-1}}$ が成立.

常用対数をとると,

$-n \leq \log_{10} B < -(n - 1)$ が成立.

n 桁の整数の首位

首位の数が a の n 桁の整数 A について,

$a \times 10^{n-1} \leq A < (a + 1) \times 10^{n-1}$ が成立.

常用対数をとると,

$(n - 1) + \log_{10} a \leq \log_{10} A < (n - 1) + \log_{10} (a + 1)$ が成立.