# 極限まとめ

## 数列の極限

**収束**
- $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ ……「極限値 $A$ に収束」

**発散**
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ $(-\infty)$ ……「正（負）の無限大に発散」
- $\{a_n\}$ が振動 ……「極限は存在しない」

## 数列の極限の性質

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がそれぞれ **極限値（有限値）** をもつとき，

① $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

② $\displaystyle \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$

③ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

④ $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ ただし，$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

## 等比数列の極限

等比数列 $\{r^n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} r^n \begin{cases} 0 & \cdots\ -1<r<1\ \text{のとき} \\ 1 & \cdots\ r=1 \\ \text{発散} & \cdots\ r \leqq -1,\ 1 \leqq r \end{cases}$$

➾**注** 初項 $a$ の等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ については，
$\boldsymbol{a=0}$ ならば $r$ によらず $0$ に収束する．

## はさみうちの原理（数列）

数列 $\{a_n\}$, $\{x_n\}$, $\{b_n\}$ の間に，常に

$$a_n \leqq x_n \leqq b_n$$

が成立しており，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

## 無限級数

**無限級数** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n + \cdots\cdots$ に対して，

**部分和** $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$ と定める。

$\{S_n\}$ が極限値 $T$ をもつ，すなわち $\lim_{n\to\infty} S_n = T$ であるとき，

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は **和 $T$ をもつ** という。

つまり，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = T$

## 無限級数の性質

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がそれぞれ **極限値（有限値）** をもつとき，

① $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

② $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

## 無限等比級数

**無限等比級数** $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ に対して

**部分和** $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1}$ である。

$$S_n = \begin{cases} na & (r=1)\cdots① \\ \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1)\cdots② \end{cases}$$

と場合分けされる。

$\lim_{n\to\infty} S_n$ を考えると，

(i) $a=0$ のとき①，②ともに $r$ によらず **0 に収束**

(ii) $-1<r<1$ のとき②は $\dfrac{a}{1-r}$ **に収束**

## 無限級数の収束・発散

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{が和をもつ} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

対偶で言い換えると，

$$\text{数列}\{a_n\}\text{が 0 に収束しない} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n\text{は発散する}$$

## 関数の極限

$\lim_{x\to a} f(x) = A$ であるとは，

$\lim_{x\to a+0} f(x) = A$ （**右側極限**）

かつ

$\lim_{x\to a-0} f(x) = A$ （**左側極限**）

であること

## はさみうちの原理（関数）

関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ が $x=a$ を除く $x=a$ の近く（近傍）で
つねに $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$ が成立しており，
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$ ならば，

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

## 三角関数の極限公式

$\theta$ は弧度法で表された角とする．
$\theta \to 0$ のとき以下の公式が成立する．

① $\displaystyle \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

② $\displaystyle \lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}$

③ $\displaystyle \lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$

## 指数・対数関数の極限

$a>1$ のとき
$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} a^x = \infty \\ \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty \\ \lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty \end{cases}$$

$0<a<1$ のとき
$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty \\ \lim_{x\to+0} \log_a x = \infty \end{cases}$$

## 自然対数 $e$ の定義 ①

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

すなわち

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

この定数 $e = 2.71828\ldots$ を **自然対数の底** という。
この定数 $e$ を底にもつ対数

$$\log_e x$$

を自然対数と呼び，$\log x$ や $\ln x$ と表す．

## 自然対数 $e$ の定義 ②

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1\ ,\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

➾**注** 高校数学においては（$e$ の性質）として扱われることが多い．

## 関数の連続性

$x=a$ の近く（近傍）で定義されている関数 $f(x)$ について

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

**$f(x)$ は $x=a$ で連続である** という．