

複素数平面まとめ

複素数平面

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$, i は虚数単位) と点 (x, y) を 1 対 1 に対応させた平面を **複素数平面** という。

絶対値

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対し、
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ と定める。
すると、 $|z|^2 = z\bar{z}$

特に、 $z \neq 0$ のとき、 $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{|z|^2}{z}$

任意の複素数 α, β に対し、

① $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

② $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ ($\beta \neq 0$)

③ $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ (三角不等式)

共役複素数

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して $\bar{z} = x - yi$ を z の **共役複素数** という。

任意の複素数 α, β に対し、

① $\begin{cases} \overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} \\ \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta} \end{cases}$

② $\overline{\alpha^n} = \bar{\alpha}^n$

実部・虚部

$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ を z の **実部**

$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ を z の **虚部** という。

実数条件・純虚数条件

・ z が実数 $\iff \operatorname{Im}(z) = 0 \iff z = \bar{z}$

・ z が純虚数 $\iff \operatorname{Re}(z) = 0$ かつ $z \neq 0 \iff z + \bar{z} = 0$ かつ $z \neq 0$

極形式

0 でない複素数 z に対して

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0)$$

を z の **極形式** 表示という。

このとき、 $\theta = \arg z$ などと表す。

積と商

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \\ z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \end{cases} \quad \text{としたとき、}$$

積

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

$$\text{つまり } |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

商

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}$$

$$\text{つまり } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

ド・モアブルの定理

n を整数とする。 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し、

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

1 の n 乗根

n を正の整数とすると、

$z^n = 1$ となる複素数 z は n 個存在し

$$z = \cos \frac{2k}{n} \pi + i \sin \frac{2k}{n} \pi \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

特に、 $z \neq 1$ である $n-1$ 個の複素数は

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z^2 + z + 1 = 0 \quad \text{を満たす。}$$

点の周りの回転

3 つの複素数 α, β, γ について、

点 α を中心に

β を r 倍 θ 回転させた点を γ とすると

$$\gamma - \alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)(\beta - \alpha)$$

特に、 $\beta \neq \alpha$ のとき、

$$\theta = \arg \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha}$$

共線条件・垂直条件

「点の周りの回転」における θ について $-\pi < \theta \leq \pi$ とすると

共線条件

異なる 3 点 α, β, γ が同一直線上であるとき、

$$\theta = 0, \pi \text{ つまり } \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ が実数}$$

☞ k (実数) を用いて、 $\gamma - \alpha = k(\beta - \alpha)$ である。

垂直条件

直線 $\alpha\beta \perp \alpha\gamma$ であるとき、

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2} \text{ つまり } \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ が純虚数}$$

☞ $\beta - \alpha$ と $\gamma - \alpha$ の内積が 0 ともとえられる。

内分・外分・重心

異なる 3 点 α, β, γ について、

① 線分 $\alpha\beta$ を $m:n$ に内分する点は $\frac{n\alpha + m\beta}{m+n}$

② 線分 $\alpha\beta$ を $m:n$ に外分する点は $\frac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$

③ 三角形 $\alpha\beta\gamma$ の重心を表す点は、 $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}$

複素数が表す図形

① $|z - \alpha| = |z - \beta|$

線分 $\alpha\beta$ の垂直二等分線

② $|z - \alpha| = r$

中心 α 、半径 r の円

② $|z - \alpha| = |z - \beta|$

線分 $\alpha\beta$ の垂直二等分線

③ $m|z - \alpha| = n|z - \beta|$ ($m:n \neq 1:1$)

アポロニウスの円

変換

① $w = z + \alpha$ (平行移動)

② $w = \beta z$ (回転・拡大)

③ $w = \frac{1}{z}$ (反転変換)

①~③ の合成を **1 次分変換** という。

④ $w = z + \frac{a^2}{z}$ (ジュコフスキー変換)