

# 東京大学 (理) 数学

## 第 1 問

(1) 関数  $f(\theta) = \sin \theta - \theta + \frac{\theta^3}{6}$  の区間  $-1 \leq \theta \leq 1$  における最大値  $M$  および最小値  $m$  を求めよ。

(2) (1) で定めた  $M$  に対し、次の不等式を示せ。

$$\frac{7}{8}\pi \leq \int_0^{2\pi} \sin(\cos x - x) dx \leq \frac{7}{8}\pi + 4M$$

## 第 2 問

$n$  を正の整数とする。座標平面上の  $3n$  個の点がなす集合

$$\{(x, y) \mid x, y \text{ は } 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq n \text{ を満たす整数}\}$$

から相異なる 3 点を選ぶ。ただし、どの 3 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 3 点が三角形の 3 頂点となる確率を  $p_n$  とする。

(1)  $p_5$  を求めよ。

(2)  $m$  を 2 以上の整数とする。 $p_{2m}$  を求めよ。

## 第 3 問

座標空間内の原点を中心とする半径 5 の球面を  $S$  とする。 $S$  上の相異なる 3 点  $P, Q, R$  が次の条件を満たすように動く。

条件:  $P, Q$  は  $xy$  平面上にあり、三角形  $PQR$  の重心は  $G(2, 0, 1)$  である。

以下の問いに答えよ。

(1) 線分  $PQ$  の中点  $M$  の軌跡を  $xy$  平面上に図示せよ。

(2) 線分  $PQ$  が通過する範囲を  $xy$  平面上に図示せよ。

## 第 4 問

$k$  を実数とし、座標平面上の曲線  $C$  を  $y = x^3 - kx$  で定める。 $C$  上の 2 点  $P, Q$  に対する以下の条件 (\*) を考える。

条件 (\*): 原点  $O$ , 点  $P$ , 点  $Q$  は相異なり、 $C$  の  $O, P, Q$  における接線のうち、どの 2 本も交わり、

そのなす角はすべて  $\frac{\pi}{3}$  となる。

ただし、2 直線のなす角は 0 以上  $\frac{\pi}{2}$  以下の範囲で考えるものとする。

(1) 条件 (\*) を満たす  $P, Q$  が存在するような  $k$  の範囲を求めよ。

(2)  $k$  が (1) で定まる範囲にあるとする。 $P, Q$  が条件 (\*) を満たすように動くとき、 $C$  の  $O, P, Q$  における接線によって囲まれる三角形の面積  $S$  の最大値を  $M$ , 最小値を  $m$  とおく。ただし、3 本の接線が 1 点で交わる場合は  $S = 0$  とする。 $M = 4m$  となる  $k$  の値を求めよ。

## 第 5 問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を  $C$  とする。複素数  $\alpha$  と  $C$  上の点  $P(z)$  に対し、 $w = (z - \alpha)^3$  とおく。 $P$  が  $C$  上を動くときの点  $Q(w)$  の軌跡を  $D$  とする。

(1)  $\alpha = -3$  とし、 $w$  の偏角を  $\theta$  とおく。 $P$  が  $C$  上を動くとき、 $\sin \theta$  がとりうる値の範囲を求めよ。

(2)  $\alpha$  が次の条件を満たすように動く。

条件:  $D$  は実軸の正の部分および負の部分の両方と共有点を持つ。

複素数平面上の点  $R(\alpha)$  が動きうる範囲の面積を求めよ。

## 第 6 問

$n$  を正の整数とする。 $n$  の正の約数のうち、3 で割って 1 余るものの個数を  $f(n)$ , 3 で割って 2 余るものの個数を  $g(n)$  とする。

(1)  $f(2800), g(2800)$  を求めよ。

(2)  $f(n) \geq g(n)$  を示せ。

(3)  $g(n) = 15$  であるとき、 $f(n)$  がとりうる値を求めよ。